Для фокальной поверхности (K) прямолинейной конгруэнции $(A_3 A_4)$ получена квадрика Ли Q ,ее уравнение имеет вид:

$$2x^1x^2-\Gamma(x^1+x^2)^2+\sqrt{2}\,x^3(x^1+x^2)+(x^3+2\Gamma x^4)^2=0.$$

Конгруэнция (Q) квадрик Q имеет 8 фокальных поверхностей .Точка K является четырехкратным фокусом квадрики Q .Остальные четыре фокуса являются точками пересечения с квадрикой Q прямых FA_3 и EE^*_{12} ,где E -фокус луча $E_{12}P$ прямолинейной конгруэнции $(E_{12}P)$,и имеют аналитический вид:

$$\Phi_{1,2}=F\pm 2\sqrt{\Gamma}A_3;\quad \Phi_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}E_{12}+P\pm\sqrt{\Gamma}E^*_{12}.$$

Список литературы

1.М а л а х о в с к и й В.С.Расслояемые пары конгруэнций фигур.-Тр.геометрич.семинара.М., ВИНИТИ, 3, 1971, с.193-220.

2.Фин и к о в С.П. Теория пар конгруэнций.М., ГИТТЛ, 1956.

3.Ф и н и к о в С.П. Асимптотически сопряженные двойные линии Ермолаева.- Уч.зап.Моск.пед.ин-та, 1951, № 16, вып3, с.235-260.

4.С в е ш н и к о в а Г.Л. Конгруэнции кривых второго порядка с одной вырождающейся фокальной поверхностью. - В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3.Калининград, 1973, с.113-125.

Е.К.С е л ь д ю к о в

СЕТИ, ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К ЗАДАННЫМ СЕМЕЙСТВАМ ЛИНИЙ НА $V_p\subset E_n$

В работе рассмотрены сети, присоединенные к заданной m-ткани на p-поверхности n-мерного евклидова пространства.

1.Пусть поверхность $V_p\subset E_n$ отнесена к подвижному полуортогональному реперу $(x, \vec{e}_I, \vec{e}_A)$,где орты $\vec{e}_I$ $(I=1,\dots,p)$ принадлежат касательной плоскости $T_p(x)$ к поверхности в точке x ,а векторы $\vec{e}_A$ $(A=p+1,\dots,n)$ образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения. $N_{n-p}(x)$ касательной плоскости $T_p(x)$,причем первые q векторов $\vec{e}_a$ $(a=p+1,\dots,p+q)$ из системы $\{\vec{e}_A\}$ расположены в главной нормали $N_q(x)$ поверхности V_p [1]. Имеем: $d\vec{x}=\omega^I\vec{e}_I$, $d\vec{e}_I=\omega_I^J\vec{e}_J+\omega_I^a\vec{e}_a$,

$$d\vec{e}_a=\omega_a^I\vec{e}_I+\omega_a^b\vec{e}_b+\omega_a^\sigma\vec{e}_\sigma,\quad d\vec{e}_\sigma=\omega_\sigma^a\vec{e}_a+\omega_\sigma^\delta\vec{e}_\delta,$$
$$(\sigma,\delta=p+q+1,\dots,n).$$

Поверхность V_p определяется системой уравнений $\omega^A=0$,продолжая которую, получим $\omega_I^A=b_{IJ}^A\omega^J$, $b_{IJ}^A=b_{JI}^A$, где функции b_{IJ}^A определяют поле второго основного тензора поверхности, причем $b_{IJ}^\sigma=0$.

Рассмотрим на поверхности V_p m-ткань $(m<p)$. Эта ткань определяет на поверхности распределение Δ_m, которое в свою очередь определяет на этой поверхности ортогонально-дополнительное ему распределение Δ_{p-m}. Расположим векторы $\vec{e}_i$ $(i=1,\dots,m)$ на касательных к линиям заданной m-ткани в точке x ,а векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha=m+1,\dots,p)$ в $\Delta_{p-m}(x)$.

2.Рассмотрим произвольный вектор из системы $\{e_i\}$, например,вектор $\vec{e}_1$.Выберем $p-m$ векторных полей $\vec{e}'_\alpha \in \Delta_{p-m}$ так,чтобы выполнялось условие $\nabla_{\vec{e}'_\alpha} \vec{e}_1 \in \Delta(\Delta_m, \vec{e}'_\alpha)$,где ∇ -символ ковариантного дифференцирования.Интегральные кривые этих векторных полей назовем линиями кривизны относительно одномерного распределения $\Delta_1 = \Delta(\vec{e}_1) \subset \Delta_m$(сравнить с [2]).

Направление в $\Delta_{p-m}(x)$, касательное к интегральной кривой,назовем направлением линии кривизны второго рода,если вдоль него дифференциал точки $\vec{F} = \vec{x} + \rho \vec{e}_1$ принадлежит плоскости $E_{m+q}(x) = \Delta(\Delta_m(x), N_q(x))$,а сами интегральные кривые-линиями кривизны второго рода.В общем случае на касательной $[x, \vec{e}_1]$ существует $p-m$ точек F_1^α ,соответствующих смещениям по α - й линии кривизны второго рода.Доказано,что так определенные линии кривизны совпадают с линиями кривизны относительно I-распределения Δ_1.

Таким образом,в общем случае на поверхности V_p получаем p одномерных распределений;их интегральные кривые образуют сеть,которую мы будем обозначать $\Sigma_p(\Delta_1 \subset \Delta_m)$.

3.Будем предполагать,что заданная m-ткань состоит из ортогональных семейств линий.Выберем векторы подвижного репера на касательных в точке x к линиям сети $\Sigma_p(\Delta_1 \subset \Delta_m)$;тогда формы $\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}} \; (\mathcal{I} \neq \mathcal{J})$ -главные: $\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}} = a_{\mathcal{J}\mathcal{K}}^{\mathcal{I}} \omega^{\mathcal{K}}$,где $a_{\mathcal{J}\mathcal{K}}^{\mathcal{I}}$ -инварианты сети.Если $\Delta_1 = \Delta(\vec{e}_1)$, то в выбранном репере будем иметь: $a_{1\beta}^\alpha = 0 \; (\alpha \neq \beta)$.

Точка F_1^α (α фиксировано) с радиус-вектором $\vec{F}_1^\alpha = \vec{x} - \frac{1}{a_{1\alpha}^\alpha} \vec{e}_1$ является псевдофокусом касательной $[x, \vec{e}_1]$ к линии ω^1 сети $\Sigma_p(\Delta_1 \subset \Delta_m)$ в точке x ,соответствующим смещению точки x в направлении линии ω^α .

Будем говорить,что сеть $\Sigma_p(\Delta_1 \subset \Delta_m)$не определена в направлении Δ_s ,если существует распределение $\Delta_s \subset \Delta_{p-m}$ $(2 \leq s \leq p-m)$ такое,что для любого вектора $\vec{e} \in \Delta_s(x)$ выполняется условие $\nabla_{\vec{e}} \vec{e}_1 \in \Delta(\Delta_m, \vec{e})$.Доказано,что сеть $\Sigma_p(\Delta_1 \subset \Delta_m)$не определена в направлении Δ_s тогда

и только тогда,когда псевдофокусы $F_1^2, F_1^3, \ldots, F_1^{s+1}$ совпадают между собой (или не существуют).

4.Рассмотрим поверхность $V_p \subset E_n$,отнесенную к сети $\Sigma_p(\Delta_1 \subset \Delta_m)$,и предположим,что распределение $\Delta_{p-m+1} = \Delta(\vec{e}_1, \vec{e}_{m+1}, \ldots, \vec{e}_p)$ голономно.Доказано,что в этом случае распределение Δ_{p-m} будет голономным в двух случаях:

I/сеть $\Sigma_p(\Delta_1 \subset \Delta_m)$ ортогональна;

2/сеть $\Sigma_p(\Delta_1 \subset \Delta_m)$не определена в направлении Δ_{p-m}.

Поверхность V_p при этом будет расслаиваться на m-параметрическое семейство $(p-m)$-мерных поверхностей. В первом случае ортогональная сеть Σ_{p-m} на поверхности $V_{p-m} \subset E_n$ из линий ω^α есть сеть линий кривизны относительно одномерной нормали $[x, \vec{e}_1]$,а точки F_1^α суть точки пересечения этой нормали с присоединенной поверхностью [1] к поверхности V_{p-m} в точке x .Во втором случае поверхность V_{p-m} состоит из полуомбилических точек [3].

5.Сеть $\Sigma_p(\Delta_1 \subset \Delta_m)$может быть присоединена к любому одномерному распредлению Δ_1 ,принадлежащему Δ_m .Рассмотрим случай,когда все сети $\Sigma_p(\Delta_1 \subset \Delta_m)$ совпадают $(\Delta_1 = \Delta(\vec{e}_1), \Delta(\vec{e}_2), \ldots, \Delta(\vec{e}_m))$.Будем обозначать новую сеть через $\Sigma_p(\Delta_m)$.Доказано,что в данном случае для любого вектора $\vec{e} \in \Delta_m(x)$ имеет место соотношение $\nabla_{\vec{e}_\alpha} \vec{e} \in \Delta(\Delta_m, \vec{e}_\alpha)$.

Расположим векторы $\vec{e}_{\mathcal{I}}$ на касательных к линиям сети $\Sigma_p(\Delta_m)$ в точке x .В таком репере будем иметь: $a_{i\alpha}^\beta = 0 \; (\alpha \neq \beta)$.Доказано,что для того ,чтобы поверхность $V_p \subset E_n$ могла нести сеть $\Sigma_p(\Delta_m)$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$R_{i\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}\left[a_{i\mathcal{I}_1}^\alpha (a_{\beta\gamma}^{\mathcal{I}_1} - a_{\gamma\beta}^{\mathcal{I}_1}) - a_{i\beta}^{\beta_1} a_{\beta_1\gamma}^\alpha + a_{i\gamma}^{\gamma_1} a_{\gamma_1\beta}^\alpha\right], \quad \alpha \neq \beta, \gamma,$$

где $R_{\mathcal{J}\mathcal{K}\mathcal{L}}^{\mathcal{I}}$ -тензор кривизны поверхности V_p ,а $\mathcal{I}_1 = 1, \ldots, m, \alpha$.Доказано также,что распределение $\Delta_{p-m} = \Delta(\vec{e}_{m+1}, \ldots, \vec{e}_p)$ будет голономным,т.е. поверхность V_p расслаивается на m-параметрическое семейство $(p-m)$-мерных поверхностей V_{p-m} в двух случаях:

1/ сеть Σ_p (Δ_m) ортогональна;

2/ сеть Σ_p (Δ_m) не определена в направлении Δ_{p-m}.

Пусть V_{p-m} -одна из поверхностей, на которые расслаивается V_p. Тогда в первом случае ортогональная сеть Σ_{p-m} на поверхности V_{p-m} из линий ω^α есть сеть линий кривизны относительно любой одномерной нормали $[x, \vec{e}_i]$. Во втором случае поверхность V_{p-m} состоит из полуомбилических точек.

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве.-Лит.матем.сборник, 1966, 6, №4, с.475-491.

2. Б а з ы л е в В.Т. Сети на многообразиях.-Тр.геометрического семинара. ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с.189-206.

3. П е р е п е л к и н Д.И. Кривизна и нормальные пространства многообразия V_m в R_n.-Матем.сб., 1935, 42, №1, 81-120.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 12 1981

А.С. Сенилов

О РАССЛОЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ V_{k+m} НА $\infty^{m-\sigma}$ ПОВЕРХНОСТЕЙ ${}_\sigma V_{k+\sigma}$ В P_N

В N - мерном проективном пространстве P_N рассмотрим поверхность ${}_\sigma V_{k+m}$ с k-мерными плоскими образующими L_k, зависящими от m параметров, имеющую σ семейств торсов ($N > k+m$; $\sigma = 1,2,\dots, m-1$). Будем рассматривать лишь поверхности, образующая плоскость которых имеет $(k-\tau)$ - мерную характеристическую плоскость $L_{k-\tau}$ (пересечение характеристик плоскости L_k). Выведем достаточный признак расслоения поверхности ${}_\sigma V_{k+m}$ на $\infty^{m-\sigma}$ тангенциально вырожденных поверхностей ${}_\sigma V_{k+\sigma}$ [1] .

Отнесем поверхность ${}_\sigma V_{k+\sigma}$ к проективному реперу $\{A_a\}$, состоящему из $N+1$ аналитических точек A_a ($a, b, c = 0,1,2,\dots,$). Уравнения инфинитезимальных перемещений репера имеют вид:

$$dA_a = \omega_a^b A_b, \tag{1}$$

где формы ω_a^b удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства [2] :